

A 2022. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

2022. október 28. – 2022. november 7.

1. Azt mondjuk, hogy egy $A \subseteq \mathbb{Z}$ halmaz *szabálytalan*, ha tetszőleges $x, y \in A$ különböző elemeire nincs x -től és y -től különböző $x + k(y - x)$ alakú eleme (ahol k egész). Létezik-e végtelen szabálytalan halmaz?

2. Legyen n pozitív egész. Tegyük fel, hogy az $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixok összege az egységmátrix, de $\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i$ szinguláris minden olyan esetben, amikor az $\alpha_i \in \mathbb{R}$ együtthatók közül legalább egy nulla.

a) Mutassuk meg, hogy $\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i$ nonszinguláris, ha $\alpha_i \neq 0$ minden i -re.

b) Lássuk be, hogy ha az A_i mátrixok szimmetrikusak, akkor mindegyikük rangja 1.

3. Legyen $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ olyan függvény, mely szomszédos egészek között lineáris, és $n = 0, 1, \dots$ esetén

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 2 \mid n, \\ 4^\ell + 1, & \text{ha } 2 \nmid n, 4^{\ell-1} \leq n < 4^\ell (\ell = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Legyen $f^1(x) = f(x)$, és $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$ minden $k \geq 2$ egészre. Határozzuk meg Lebesgue majdnem minden $x \in [0, \infty)$ -re a $\liminf_{k \rightarrow \infty} f^k(x)$ és $\limsup_{k \rightarrow \infty} f^k(x)$ értékét.

4. Minden n -edfokú, egész együtthatós f polinomra tekintsük az

$$\int_{-1}^1 x^n f(x) dx$$

integrált. Jelölje α_n azt a legkisebb pozitív valós számot, amit ilyen integrál adhat. Határozzuk meg a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \alpha_n}{n}$$

határértéket.

5. Ki lehet-e választani a sík minden egyeneséről egy-egy nem elfajuló szakaszt úgy, hogy bármely két kiválasztott szakasz diszjunkt legyen?

6. Legyen ε egy primitív hetedik egységgyök. Mely egész számok állnak elő $|\alpha|^2$ alakban, ahol α a $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ hetedik körosztási test egy eleme?

7. Egy szabályos k -szög csúcsaiba pontszerű bábukat állítunk, majd ezekkel lépegetünk. Egy lépésben egy bábu átugrik egy másikat, azaz az új helye a pillanatnyi helyének tükörképe lesz egy másik bábu pillanatnyi helyére. Milyen $k \geq 3$ egész esetén lehet ilyen lépések sorozatával elérni, hogy a bábuk egy, az eredetitől eltérő méretű szabályos k -szög csúcsait alkossák?

8. Igazoljuk, hogy az $\varepsilon_n = \pm 1$ előjelek megválaszthatóak úgy, hogy az $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^s} : \{\operatorname{Re} s > 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény minden $\xi \in \{\operatorname{Re} s = 1\}$ pontban minden komplex értékhez torlódik (azaz minden $\xi \in \{\operatorname{Re} s = 1\}$ -hez és $z \in \mathbb{C}$ -hez létezik olyan $s_n \rightarrow \xi$, $\operatorname{Re} s_n > 1$ sorozat, melyre $f(s_n) \rightarrow z$).

9. A síkvektorok az összeadásra nézve csoportot alkotnak. Mutassuk meg, hogy ennek a csoportnak minden olyan S halmaz generátorrendszere, amely tartalmazza egy körív pozitív lineáris mértékű Borel részalmazát.

10. Létezik-e $f: \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ folytonos függvény, melyre minden irracionális szám ősképeinek pozitív a Hausdorff-dimenziója?

* * *

A Schweitzer Miklós Emlékversenyen részt vehetnek mindazok, akik a verseny megrendezésekor Magyarországon vagy magyar állampolgárként külföldön valamely egyetem, főiskola hallgatói, vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny megrendezésének évében szereztek egyetemi, főiskolai oklevelet. PhD-hallgatók csak akkor vehetnek részt, ha egyetemi, főiskolai diplomájukat a verseny megrendezésének évében szereztek. A versenyből ki vannak zárva azok, akik a verseny megrendezésének événél korábban MSc-szintű oklevelet szereztek matematikus, alkalmazott matematikus, informatikus, programtervező matematikus vagy matematika tanári szakon akár itthon, akár külföldön.

A feladatok megoldására a versenyzők idén 10 napot fordíthatnak. A megoldásokat kizárólag elektronikusan lehet benyújtani a schweitzer.miklos@gmail.com címre **2022. november 7-én (hétfőn) magyar idő szerint 12:00 óráig**, a versenyző nevének, egyetemének, évfolyamának, végzettségének, pontos lakcímének és e-mail címének feltüntetésével. Lehetőség szerint egy levélben, **feladatonként külön fájlban** várjuk a megoldásokat, **PDF formátumban** (szkennelt dokumentum esetén jól olvashatóan) és magyar nyelven írva. Kivételes esetekben, előzetes egyeztetést követően elfogadunk angolul írott megoldásokat is. Más módon illetve később beadott dolgozatokat a versenybizottság nem vesz figyelembe.

A versenyzők tetszés szerinti számú kitűzött feladat megoldását nyújthatják be. A verseny nyertesei között a Társulat Schweitzer Miklós díjakat oszt ki. Aki legalább három feladatot megold, az mindenképpen díjban vagy elismerő oklevélben részesül.

A feladatokat a versenyzőknek önállóan kell megoldaniuk. Több versenyző együttműködése nincs megengedve. Az internet használata csak passzív módon engedélyezett, azaz keresni szabad, de bármilyen fórumon bármilyen kérdést feltenni tilos. Ha a versenybizottság tudomására jut, hogy valamelyik versenyző ezt a követelményt megszegte, az illetőt a versenyből kizárja.

Arra kérünk mindenkit, hogy a versenyzőknek semmilyen segítséget ne nyújtson a matematikai feladatok megoldásához, s velük semmiféle eszmecsere se folytassanak a feladatok megoldásával kapcsolatban a beadási határidő lejártáig. Kérjük továbbá, hogy amennyiben ilyen természetű szabálytalanság elkövetése jut bárki tudomására, haladéktalanul jelezze ezt a versenybizottságnak a fenti címen.

Idén a megoldások közös megbeszélésére 2022. november 8-án (kedden) magyar idő szerint 16:00 órakor, az Eötvös Loránd Tudományegyetem lágymányosi campusán (1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C), a 4-713-as számú teremben kerül sor. Az eredményhirdetés idejéről és módjáról később fogunk tájékoztatást adni az alábbi linken:

<http://www.bolyai.hu/schweitzer.htm>

Ugyanitt tesszük közzé a közös megbeszélés után a nem hivatalos, előzetes megoldásvázlatokat. Az eredményhirdetést követően minden versenyzőnek emailben megírjuk, hogy a beadott megoldásai közül melyeket találtuk teljesnek, lényegében helyesnek, részben megoldottnak illetve hibásnak.

Jó feladatmegoldást kívánunk!

a Versenybizottság